

1.Introduction

L'un des aspects de premier plan dans la logistique est le transport de marchandises. La logistique reposant notamment sur des mouvements de flux de marchandises, le transport se révèle donc incontournable. Selon Devernay, <le transport constitue le véritable "moteur" de cette logistique : sans une organisation de transport, réactive, flexible et économique, la logistique devrait faire appel à des moyens coûteux en surfaces, manutention, magasinage et systèmes d'information, pour satisfaire les exigences de ses consommateurs.

Durant ces dernières décennies, la mondialisation de l'industrie combinée à l'expansion du commerce international a profondément remodelé les systèmes logistiques. Par voie de conséquence, la gestion des flux de transports est devenue très complexe. De plus, les coûts de transports représentant une part significative dans les dépenses d'exploitation des entreprises, la nécessité de solutions d'optimisation de plus en plus performantes se fait grandissante.

Plus précisément, dans la suite de ce chapitre , l'intérêt est porté sur le problème de routage des véhicules (Vehicle Routing Problem). Il s'agit d'un problème d'optimisation combinatoire dont la résolution fait appel à des méthodes relevant de la recherche opérationnelle .

2.Définition de Problème de Tournées de Véhicules (VRP)

Le problème de construction de tournées de véhicules connu sous le nom de Véhicule Routing Problem (VRP) est une extension du problème du voyageur de commerce, connu également sous le nom de Travelling Salesman Problem (TSP). Nous allons donc dans un premier temps définir le problème du voyageur de commerce, puis nous verrons son extension : le problème de construction de tournées.

2.1.Le problème du voyageur de commerce (Travelling Salesman Problem TSP)

Le problème du voyageur de commerce consiste à trouver un cycle de coût total minimal qui traverse chacun des nœuds d'un graphe exactement une fois. On parle alors de recherche de cycle hamiltonien de coût minimal.

Il équivaut à minimiser le parcours effectué par un véhicule de capacité égale à la demande totale des clients, qui quitte le dépôt plein et dessert l'ensemble des clients avant de retourner

vide au dépôt. L'objectif de ce problème est donc de minimiser les coûts de transport liés aux arcs visités par le circuit.[12]

2.2. Le problème de tournées de véhicules VRP

Le problème de tournées de véhicules (ou Vehicle Routing Problem = VRP) est une généralisation du TSP obtenue lorsque K véhicules de capacité Q sont disponibles au nœud dépôt pour satisfaire les demandes des clients. Chaque véhicule doit donc effectuer une tournée réalisable, c'est à dire quitter le dépôt, visiter une fois des clients dont la somme des demandes ne dépasse pas la capacité Q , avant de retourner au dépôt. Chaque client doit être servi par un seul véhicule qui satisfait totalement sa demande.[12]

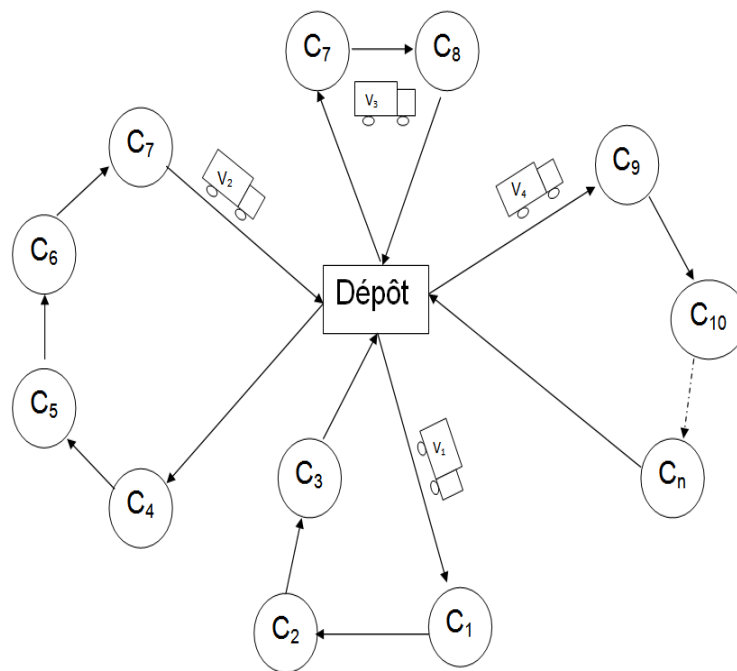


Figure. 2.1 Problème de tournée de véhicule

3.Paramètres du VRP

Le VRP est caractérisé par le réseau qui le constitue, la clientèle à servir, la flotte de véhicules et la fonction objectif.

3.1.Réseau

Le réseau routier peut être symétrique ou asymétrique en conséquence, le graphe associé $G = (V, E)$ sera orienté ou non. les sommets représentent les clients, caractérisés par sa position géographique (les coordonnées (x, y)) et les arêtes représentent les chemins reliant les différents clients.. Les tournées peuvent partir d'un seul dépôt ou de plusieurs dépôts.

3.2.Clientèle

La principale caractéristique de la clientèle est sa demande en marchandise.

La demande totale des clients d'une même tournée ne doit pas excéder la capacité Q du véhicule. Aussi, il est caractérisé par sa position dans l'espace. Enfin la demande peut être déterministe (quantité demandée par le client est fixe et connue par le distributeur) ou incertaine (stochastique).

3.3.Flotte de véhicules

Le premier critère de la flotte est sa taille le second est son homogénéité (les véhicules sont caractérisés par la même capacité d'emport et le même coût de transport) ou hétérogénéité (les véhicules ont des capacités d'emport et/ou coûts de transport différents).

3.4.Fonction objectif

Les objectifs les plus communs sont soit la minimisation du nombre de véhicules utilisés soit la minimisation de la distance totale parcourue par les véhicules. D'autres objectifs peuvent être considérés :

- la minimisation de la durée totale des tournées
- la minimisation du coût total des tournées (en prenant en compte les coûts des véhicules, des chauffeurs etc.)

- la minimisation des pénalités liées aux violations des contraintes, notamment dans le cas de fenêtres temporelles
- la maximisation des gains engendrés par les tournées.

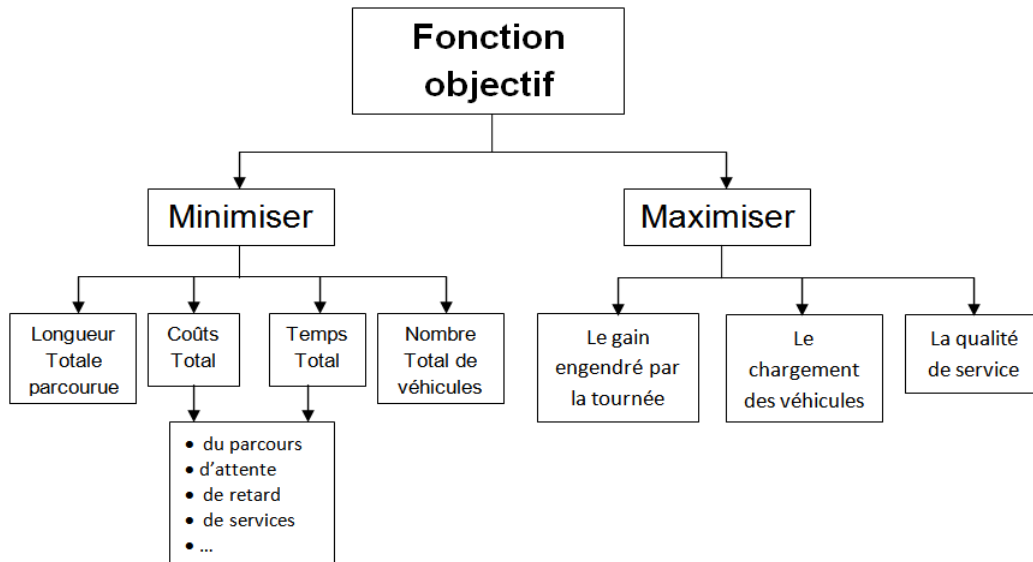


Figure. 2.2 Différentes Fonctions Objectif

4. Formulation mathématique du VRP

Les problèmes de transport se modélisent par un graphe orienté ou non $G = (V, E)$ où $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ est un ensemble de sommets modélisant les villes (ou clients) et $E = \{(v_i, v_j) : i \leq j; v_i, v_j \in V\}$ est un ensemble d'arêtes ou d'arcs reliant les villes. Les arcs et les arêtes correspondent respectivement aux problèmes symétriques (ou non orientés) et aux problèmes asymétriques (ou orientés). [13]

Pour le **VRP**, nous rajoutons à l'ensemble des sommets du graphe $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ un autre sommet v_0 , correspondant au dépôt.

Avant d'entamer les formulations, il est nécessaire de définir les paramètres suivants :

n : nombre de clients.

m : nombre de véhicules ($m \leq n$).

Q_k : capacité du $k^{ème}$ véhicule.

$\mathcal{T}_k$: temps maximal de la tournée du $k^{ème}$ véhicule .

as_j : nombre d'arcs sortants du sommet j .

ae_j : nombre d'arcs entrants du sommet j .

q_j : demande du $j^{ème}$ client $d_o = o$.

sk_j : durée du service du $j^{ème}$ client par le $k^{ème}$ véhicule ($s_o^k = o$) .

t_{ij}^k : temps nécessaire pour passer du $i^{ème}$ client au $j^{ème}$ client ($t_{jj}^k = +\infty$).

d_{ij}^k : distance séparant $i^{ème}$ client du $j^{ème}$ client ($d_{jj}^k = +\infty$).

C_{ij} : le coût du déplacement du $i^{ème}$ client au $j^{ème}$ client.

La formulation mathématique du VRP classique la plus communément utilisée dans la littérature est celle adoptée par Laporte [1992], Rego and Roucairol [1994], Toth and Vigo [2001 a], Crainic and Semet [2006]. En effet, elle nécessite la définition de $n \times n$ variables de décision de type binaire, à trois indices, suivantes :

$$x_{ij}^k \begin{cases} 1 \text{ si l'arc } (i, j) \text{ est parcouru par } k^{ème} \text{ véhicule} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad (1.1)$$

Autrement dit :

$$x_{ij}^k \in \{0,1\} ; i = 0, \dots, n ; j = 0, \dots, n ; k = 0, \dots, m \quad (1.2)$$

Le problème se modélise comme suit :

$$\text{Minimiser } \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij} \sum_{k=1}^m x_{ij}^k \quad (1.3)$$

Sous

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m x_{ij}^k = 1 ; j = 2, \dots, n \quad (1.4)$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m x_{ij}^k = 1; i = 1, \dots, n \quad (1.5)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ip}^k - \sum_{j=1}^n x_{pj}^k = 0; k = 1, \dots, m; p = 1, \dots, n \quad (1.6)$$

$$\sum_{j=1}^n q_i \left(\sum_{k=1}^m x_{ij}^k \right) \leq Q_k; k = 1, \dots, m \quad (1.7)$$

$$\sum_{i=1}^n s_i^k x_{ij}^k + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n t_{ij}^k x_{ij}^k \leq T_k; k = 1, \dots, m \quad (1.8)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{0j}^k \leq 1; k = 1, \dots, m \quad (1.9)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{i0}^k \leq 1; k = 1, \dots, m \quad (1.10)$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S} x_{ij}^k \leq |S| - 1; \text{ pour tout } S \in N; \text{ et } 2 \leq |S| \leq (n - 1). \quad (1.11)$$

La formule (1.3) représente la fonction objective du VRP classique.

1.4- 1.5	assurent que chaque client n'est servi qu'une et seule fois et par un et un seul véhicule.
1.6	assure la continuité de la tournée : non seulement un véhicule doit passer une et une seule fois chez un client (1.4) et (1.5) Mais il doit impérativement le quitter une fois le service est achevé.
1.7	assure que la capacité du véhicule ne sera pas dépassée.
1.8	assure que la durée totale d'une tournée ne dépassera jamais sa durée totale maximale.
1.9 1.10	Les contraintes (1.9) et (1.10) assurent le non dépassement de la disponibilité de chacun des véhicules, un véhicule ne sort du dépôt et n'y revient qu'une seule fois
1.11	La dernière contrainte (1.11) garantit l'élimination de sous-tours.

Tableau 2.1 Les contraintes du problème

5. Le VRP et ses variantes

Durant des années de recherches sur le VRP d'autres dérivées de ce problème sont apparues. Ces apparitions sont dues essentiellement aux activités des chercheurs qui travaillent de plus en plus sur les problèmes de transport et de distribution que rencontrent les sociétés. Dans ce qui suit nous allons présenter les principaux problèmes dérivés du VRP :

5.1. TSP (Travelling Salesman Problem)

Le problème du voyageur de commerce consiste à trouver le chemin le plus court pour passer par l'ensemble des villes données une fois et une seule et revenir à la ville de départ. C'est donc un cas particulier du VRP sans contrainte de capacité et avec un seul véhicule.[14]

5.2.CVRP (Capacitated Vehicle Routing Problem)

Comme défini précédemment, un problème CVRP consiste à affecter chaque client à une tournée effectuée par un seul véhicule de capacité finie. Ce véhicule commence et termine sa tournée au dépôt.[5]

5.3.DVRP (Dynamic Vehicle Routing Problem)

Contrairement au VRP classique où toutes les demandes des clients sont connues et planifiées à l'avance, le DVRP illustre mieux la réalité. Dans les problèmes de transport réels dans la société d'aujourd'hui la composante dynamique est très importante, elle s'exprime surtout par les apparitions de nouveaux clients, de nouvelles demandes, ou de pannes des véhicules de transport. Dans ce genre de situation, le décideur doit réorganiser, en un temps acceptable, la planification des itinéraires de sa flotte de véhicules pour répondre aux nouvelles demandes urgentes.[15]

5.4.VRPTW (Vehicle Routing Problem with Time Windows)

Le VRPTW est un des problèmes les plus étudiés. Dans un VRPTW, de nouvelles contraintes temporelles sont ajoutées : chaque client doit être servi dans un intervalle de temps durant lequel il est disponible pour être visité.[14]

5.5.VRPB (Vehicle Routing Problem with backhauls)

Ce problème est une prolongation du VRP classique. Il comporte des clients auxquels des produits doivent être livrés et des fournisseurs dont les marchandises doivent être amenées au dépôt. Donc, pour éviter de réarranger les produits transportés dans le véhicule sur une tournée, les clients doivent être visités avant les fournisseurs.[14]

5.6.PVRP (Periodic Vehicle Routing Problem)

Le problème de tournées de véhicules multi périodique (PTVMP) consiste à livrer pour un ensemble de clients, la quantité demandée d'un ou de plusieurs produits sur un horizon de temps donné. Dans ce problème, la quantité de produits livrée à un client, permet à ce dernier de subvenir à ses besoins en attendant la prochaine visite du véhicule. Le but principal de ce problème se divise en deux parties : la première consiste à planifier les

horaires de livraison de chaque client sur un horizon de temps prédéterminé ; la deuxième consiste à organiser les tournées des véhicules afin d'effectuer les livraisons nécessaires tout en optimisant le coût total de transport. Outre la connaissance et l'utilisation des contraintes connues d'un problème de transport, le PVRP nécessite l'intégration des éléments de gestion de stock afin de respecter les besoins en quantité et en temps des clients.[15]

5.7.SVRP

Un problème VRP est dit stochastique si au moins un de ses éléments est aléatoire, c'est-à-dire avec une certaine incertitude. Ces éléments peuvent être une ou plusieurs demandes des clients, les temps ou les coûts de transport. Le problème avec les demandes stochastiques est celui le plus étudié dans la littérature. La majorité des recherches suppose que les demandes aléatoires suivent une loi de distribution « normale » . [5]

6.La classification du VRP

Avant de connaître la classe du **VRP** il faut savoir d'abord ce qu'est La complexité algorithmique. La complexité d'un algorithme est le nombre d'opérations élémentaires (affectations, comparaisons, opérations arithmétiques) effectuées par un algorithme. Ce nombre s'exprime en fonction de la taille n des données .comme elle sert à mesurer l'efficacité d'un algorithme de résolution d'un problème. Donc Selon le critère de complexité, nous distinguons essentiellement quatre classes de problèmes :

➤ Classe P est une classe contient Les problèmes pouvant être résolus par une machine de Turing¹ déterministe en temps de calcul polynomial par rapport à la taille de l'instance du problème à traiter. Ils sont souvent faciles à résoudre par des algorithmes efficaces dont le nombre d'instructions nécessaire pour la résolution d'un problème donné est borné par une fonction polynomiale par rapport à la taille du problème . [16]

➤ Classe P-Complet

Dans cette classe, on trouve l'ensemble des problèmes polynomiaux et l'ensemble des problèmes non polynomiaux où tout problème polynomial peut se réduire en un temps polylarithmique avec ou sans l'utilisation d'une machine de calcul déterministe. [17]

Classe NP

est une classe regroupe l'ensemble de problèmes qui peuvent être résolus avec une machine de Turing non-déterministe² et admettent un algorithme polynomial pour tester la validité d'une solution du problème traité (i.e. il est possible de vérifier que la solution proposée est correcte en un temps polynomial par rapport à la taille du problème).[16]

➤ Classe NP-DUR

Cette classe est dite aussi NP-Difficile. Elle regroupe l'ensemble des problèmes dont la complexité est exponentielle ou doublement exponentielle. Cette classe de problème se distingue par la difficulté de résolution optimale ou exacte des grandes instances, en un temps polynomial. Cet effet, on se contente de trouver des solutions dites de bonne qualité en un temps polynomial. Parmi les problèmes de cette classe, on cite les problèmes de partitionnement d'arbres, des connexités dans un graphe de routage,

Le problème de tournées de véhicules est un des problèmes de routage. Lenstra et Rinnooy Kan ont prouvé que le VRP est un problème NP-DUR. Sa résolution par une méthode exacte s'avère inappropriée pour les instances de grandes taille. Il est donc inévitable de procéder à sa résolution par des approches heuristiques, qui fournissent des solutions réalisables et appréciables en un temps raisonnable.[17]

7.Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté le problème du VRP. comme nous l'avant déjà dit Les problèmes de tournée des véhicules appartiennent à la classe NP difficiles .donc Leur résolution n'est possible que d'une manière approchée car de nos jours il n'y a aucun algorithme qui puisse nous permettre leur résolution en un temps polynomial. Alors Les approches heuristiques dont nous vous parlerons dans le chapitre suivant résolvent les problèmes de ce genre .